Antes de empezar

Propiedades de las potencias de exponente entero

Conviene que recuerdes las propiedades de las potencias que has estudiado en cursos anteriores

- El producto de potencias de la misma base es otra potencia de la misma base y de exponente la suma de los exponentes.

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

$$x^2 \cdot x^7 = x^{2+7} = x^9$$

- El cociente de potencias de la misma base es otra potencia de la misma base y de exponente la resta de los exponentes.

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

$$\frac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3$$

- La potencia de otra potencia es una potencia de la misma base y de exponente el producto de los exponentes.

$$\boxed{\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}}$$

$$\left(x^7\right)^3 = x^{7\cdot 3} = x^{21}$$

- Una potencia de exponente cero es igual a ls unidad.

$$\boxed{a^0 = 1}$$

$$7^0 = 1$$

- El producto de potencias del mismo exponente es otra potencia del mismo exponente y de base el producto de las bases.

$$\boxed{a^n \cdot b^n = \left(a\cdot b\right)^n}$$

$$2^5 \cdot 3^5 = \left(2\cdot 3\right)^5 = 6^5$$

- El cociente de potencias del mismo exponente es otra potencia del mismo exponente y de base el cociente de las bases.

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

$$\frac{8^6}{4^6} = \left(\frac{8}{4}\right)^6 = 2^6$$

1. Radicales

Definición

Llamamos **raíz n-ésima** de un número dado a al número b que elevado a n nos da a.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Un **radical** es equivalente a una **potencia de exponente fraccionario** en la que el **denominador** de la fracción es el **índice** del radical y el **numerador** de la fracción es el **exponente** el radicando.

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ por ser } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$$

Radicales equivalentes

Dos o más radicales se dicen **equivalentes** si las fracciones de los exponentes de las potencias asociadas son equivalentes.

Dado un radical se pueden obtener infinitos radicales semejantes, **multiplicando** o **dividiendo** el exponente del radicando y el índice de la raíz por un mismo número. Si se multiplica se llama **amplificar** y si se divide se llama **simplificar** el radical.

Radical **irreducible**, cuando la fracción de la potencia asociada es irreducible.

$$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^4}$$

son equivalentes por ser: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Amplificar: $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3\cdot 2]{x^{2\cdot 2}} = \sqrt[6]{x^4}$

Simplificar: $\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6:2]{x^{4:2}} = \sqrt[3]{x^2}$

$\sqrt[3]{x^2}$

Irreducible por ser m.c.d.(3,2)=1

Introducción y Extracción de factores

Para **introducir** un factor dentro de un radical se eleva el factor a la potencia que indica el índice y se escribe dentro.

Si algún factor del radicando tiene por exponente un número mayor que el índice, se puede **extraer** fuera del radical dividiendo el exponente del radicando entre el índice. El cociente es el exponente del factor que sale fuera y el resto es el exponente del factor que queda dentro.

Introducir

$$x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x} = \sqrt[3]{x^4}$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$$

Extraer:

$$\sqrt[5]{x^{13}} = x^2\sqrt[5]{x^3} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$$

1728	2
864	2
432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$$\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} =$$
$$= 2^2 \cdot 3 \ = 12$$

Cálculo de raíces

Para calcular la raíz n-ésima de un número primero se factoriza y se escribe el número como producto de potencias, luego se extraen todos los factores.

Si todos los exponentes del radicando son múltiplos del índice, la raíz es exacta.

Reducir a índice común

$\sqrt[6]{2}$; $\sqrt[10]{3}$

m.c.m(6,10)=30

$\sqrt[6]{2} = \sqrt[30]{2^5} = \sqrt[30]{32}$

$\sqrt[10]{3} = \sqrt[30]{3^3} = \sqrt[30]{27}$

Reducción a índice común

Reducir a **índice común** dos o más radicales es encontrar radicales equivalentes a los dados que tengan el mismo índice.

El índice común es cualquier múltiplo del m.c.m. de los índices.

El mínimo índice común es el m.c.m. de los índices.

Los siguientes radicales son semejantes:

$2\sqrt[3]{4}$; $7\sqrt[3]{4}$; $5\sqrt[3]{4}$

Los siguientes radicales no son semejantes:

$2\sqrt[3]{4}$; $2\sqrt[5]{4}$ El índice es distinto

Radicales semejantes

Radicales semejantes son aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando. Pueden diferir únicamente en el coeficiente que los multiplica.

EJERCICIOS resueltos

1. Escribe los siguientes radicales como potencia de exponente fraccionario:

a) $\sqrt[5]{3}$ $\qquad \sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

b) $\sqrt[5]{x^3}$ $\qquad \sqrt[5]{x^3}$

2. Escribe las siguientes potencias como radicales:

a) $7^{\frac{1}{2}}$ $\qquad 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

b) $5^{\frac{2}{3}}$ $\qquad 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

3. Escribe un radical equivalente, amplificando el dado:

a) $\sqrt[3]{5}$ $\qquad \sqrt[3]{5} = \sqrt[3\cdot 2]{5^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b) $\sqrt[5]{x^4}$ $\qquad \sqrt[5]{x^4} = \sqrt[5\cdot 3]{x^{4\cdot 3}} = \sqrt[15]{x^{12}}$

4. Escribe un radical equivalente, simplificando el dado.

a) $\sqrt[6]{49}$ $\qquad \sqrt[6]{49} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6:2]{7^{2:2}} = \sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[35]{x^{28}}$ $\qquad \sqrt[35]{x^{28}} = \sqrt[35:7]{x^{28:7}} = \sqrt[5]{x^4}$

5. Introduce los factores dentro del radical:

a) $2\cdot\sqrt[4]{3}$ $\qquad 2\cdot\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4\cdot 3} = \sqrt[4]{16\cdot 3} = \sqrt[4]{48}$

b) $x^2\sqrt[7]{x^3}$ $\qquad x^2\sqrt[7]{x^3} = \sqrt[7]{(x^2)^7\cdot x^3} = \sqrt[7]{x^{14}\cdot x^3} = \sqrt[7]{x^{17}}$

6. Extrae los factores del radical:

a) $\sqrt[4]{128}$ $\qquad \sqrt[4]{128} = \sqrt[4]{2^7} = 2\sqrt[4]{2^3} = 2\sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[7]{x^{30}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^{30}} = \sqrt[7]{x^{28+2}} = \sqrt[7]{x^{28}\cdot x^2} = x^4\sqrt[7]{x^2}$

7. Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{1024}$ $\qquad \sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt[7]{x^{84}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^{84}} = \sqrt[7]{x^{12\cdot 7}} = \sqrt[7]{(x^{12})^7} = x^7$

8. Reduce a índice común

a) $\sqrt{3}; \sqrt[3]{5}$ $\qquad \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8} \;\; ; \;\; \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b) $\sqrt[4]{x^3}; \sqrt[6]{x^5}$ $\qquad \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^9} \; ; \; \sqrt[6]{x^5} = \sqrt[12]{x^{10}}$

9. Indica que radicales son semejantes

a) $\sqrt[4]{3}; 5\sqrt[4]{3}$ $\qquad \sqrt[4]{3}$ y $5\sqrt[4]{3}$ Son semajentes

b) $\sqrt[4]{x}; \sqrt[3]{x}$ $\qquad \sqrt[4]{x}$ y $\sqrt[3]{x}$ No son semajentes,tienen distinto indice

cidead

2. Propiedades

$$\sqrt[3]{2\cdot5} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[7]{a^2\cdot b^4} = \sqrt[7]{a^2}\cdot\sqrt[7]{b^4}$$

Raíz de un producto

La raíz n-ésima de un producto es igual al producto de las raíces n-ésimas de los factores.

$$\boxed{\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{a\cdot b} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{b^3}}$$

Raíz de un cociente

La raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de las raíces n-ésimas del dividendo y del divisor.

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{x^7} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^7$$

Raíz de una potencia

Para hallar la raíz de una potencia, se calcula la raíz de la base y luego se eleva el resultado a la potencia dada.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p}$$

Demostración: $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$$

Raíz de una raíz

La **raíz n-ésima** de la **raíz m-ésima** de un número es igual a la raíz **nm-ésima** de dicho número.

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

3. Simplificación

Racionalización

Racionalizar una expresión con un radical en el denominador, consiste en encontrar una expresión equivalente que no tenga raíces en el denominador.

Para ello se multiplica numerador y denominador por la expresión adecuada para que, al operar, la raíz desaparezca.

Si el denominador es un binomio se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado* del denominador.

* **El conjugado de** $\boxed{a+b}$ **es** $\boxed{a-b}$

Cuando el denominador es un radical

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{x^4}}=\frac{1\cdot\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^4}\cdot\sqrt[7]{x^3}}=\frac{\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^7}}=\frac{\sqrt[7]{x^3}}{x}$$

Cuando el denominador es un binomio

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

Simplificar un radical

Simplificar un radical es escribirlo en la forma más sencilla, de forma que:

- El índice y el exponente sean primos entre sí.
- No se pueda extraer ningún factor del radicando.
- El radicando no tenga ninguna fracción.

$$\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$$

$$\sqrt[7]{a^{30}}=a^4\sqrt[7]{a^2}$$

EJERCICIOS resueltos

10. Escribe con una sóla raíz:

a) $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$ $\qquad \sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[10]{3}$

b) $\sqrt[7]{x^4\sqrt{x}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^4\sqrt{x}} = \sqrt[7]{\sqrt{x^8 \cdot x}} = \sqrt[14]{x^9}$

11. Escribe con una sóla raíz:

a) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$ $\qquad \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

b) $\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2}$ $\qquad \sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2} = \sqrt[5]{x^3}$

12. Escribe con una sóla raíz:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}} = \sqrt[5]{\dfrac{x^4}{x^3}} = \sqrt[5]{x}$

13. Racionaliza.

a) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{9}}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt[5]{9}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{9}}{3}$

b) $\dfrac{2}{5\cdot\sqrt[3]{4}}$ $\qquad \dfrac{2}{5\cdot\sqrt[3]{4}} = \dfrac{2}{5\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{5\cdot\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{5\cdot\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{5\cdot 2} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{5}$

14. Racionaliza:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^4}}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt[7]{x^4}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^4}\cdot\sqrt[7]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{x^3}}{x}$

b) $\dfrac{1}{x^2\sqrt[7]{x^3}}$ $\qquad \dfrac{1}{x^2\sqrt[7]{x^3}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[7]{x^4}}{x^2\sqrt[7]{x^3}\cdot\sqrt[7]{x^4}} = \dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{x^2\sqrt[7]{x^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{x^2\cdot x} = \dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{x^3}$

15. Racionaliza:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{1\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)} = \dfrac{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{5-4} = \sqrt{10}-2\sqrt{2}$

c) $\dfrac{1}{3-\sqrt{x}}$ $\qquad \dfrac{1}{3-\sqrt{x}} = \dfrac{1\cdot\left(3+\sqrt{x}\right)}{\left(3-\sqrt{x}\right)\cdot\left(3+\sqrt{x}\right)} = \dfrac{3+\sqrt{x}}{9-x}$

4. Operaciones con radicales

Suma y Resta de Radicales

Para sumar o restar radicales se necesita que sean semejantes (que tengan el mismo índice y el mismo radicando), cuando esto ocurre se suman ó restan los coeficientes de fuera y se deja el radical.

$$\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{2^3}+\sqrt{2}=$$
$$=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x}+\sqrt[6]{x^3}=\sqrt{x}+\sqrt{x}=2\sqrt{x}$$

Producto de Radicales

Para multiplicar radicales se necesita que tengan el mismo índice, cuando esto ocurre el resultado es un radical del mismo índice y de radicando el producto de los radicandos.

Si tienen distinto índice, primero se reduce a índice común.

$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{9\cdot 8}=\sqrt[6]{72}$$

$$\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt{x}=\sqrt[10]{x^2}\cdot\sqrt[10]{x^5}=\sqrt[10]{x^7}$$

Cociente de Radicales

Para dividir radicales se necesita que tengan el mismo índice, cuando esto ocurre el resultado es un radical del mismo índice y de radicando el cociente de los radicandos.

Si tienen distinto índice, primero se reduce a índice común.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}}=\sqrt[6]{2}$$

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x}}=\frac{\sqrt[8]{x^2}}{\sqrt[8]{x}}=\sqrt[8]{x}$$

EJERCICIOS resueltos

16. Calcular la suma:

a) $\sqrt{40}+\sqrt{90}$ $\qquad$ $\sqrt{40}+\sqrt{90}=\sqrt{4\cdot 10}+\sqrt{9\cdot 10}=2\sqrt{10}+3\sqrt{10}=5\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{32}-\sqrt{8}$ $\qquad$ $2\sqrt{32}-\sqrt{8}=2\sqrt{2^5}-\sqrt{2^3}=2\cdot 2^2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=8\sqrt{2}-2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{16}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{16}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4}$

d) $2\sqrt{\frac{1}{2}}+5\sqrt{8}$ $\qquad$ $2\sqrt{\frac{1}{2}}+5\sqrt{8}=\sqrt{\frac{4\cdot 1}{2}}+5\sqrt{2^3}=\sqrt{2}+10\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

17. Calcular y simplificar:

a) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[5]{27}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

b) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[9]{x^2}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[5]{x^3}$

c) $\sqrt[5]{x^3\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{x^3\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}=\sqrt[5]{\sqrt{x\cdot x^3}}\cdot\sqrt{x}=\sqrt[10]{x^4}\cdot\sqrt{x}=\sqrt[10]{x^4}\cdot\sqrt[10]{x^5}=\sqrt[10]{x^9}$

d) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{2^9}=\sqrt[12]{2^{19}}=2\sqrt[12]{2^7}$

18. Calcular y simplificar:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[5]{2}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[5]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[5]{2}}=\dfrac{\sqrt[15]{2^{20}}}{\sqrt[15]{2^3}}=\sqrt[15]{2^{17}}=2\sqrt[15]{2^2}=2\sqrt[15]{4}$

b) $\dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[14]{x^3}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[14]{x^3}}=\dfrac{\sqrt[14]{x^8}}{\sqrt[14]{x^3}}=\sqrt[14]{x^5}$

a) $\dfrac{\sqrt[6]{8^4}}{\sqrt[8]{4^3}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[6]{8^4}}{\sqrt[8]{4^3}}=\dfrac{\sqrt[6]{\left(2^3\right)^4}}{\sqrt[8]{\left(2^2\right)^3}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^{12}}}{\sqrt[8]{2^6}}=\dfrac{\sqrt[24]{\left(2^{12}\right)^4}}{\sqrt[24]{\left(2^6\right)^3}}=\dfrac{\sqrt[24]{2^{48}}}{\sqrt[24]{2^{18}}}=\sqrt[24]{2^{30}}=\sqrt[4]{2^5}=2\sqrt[4]{2}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[3]{x^4\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{x\cdot x^8}}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{\sqrt[6]{x^9}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{\sqrt[12]{x^{18}}}{\sqrt[12]{x^3}}=\sqrt[12]{x^{15}}=x\sqrt[12]{x^3}$

19. Calcular y simplificar

a) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[4]{2^3}}=\dfrac{\sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{2^8}}{\sqrt[12]{2^9}}=\dfrac{\sqrt[12]{2^{24}}}{\sqrt[12]{2^9}}=\sqrt[12]{2^{15}}=\sqrt[4]{2^5}=2\sqrt[4]{2}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}}$

$$\frac{\sqrt[5]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt[5]{\sqrt{2\cdot 2^2}}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2^3}}=\frac{\sqrt[10]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2^3}}=\frac{\sqrt[30]{2^9}\cdot\sqrt[30]{2^{20}}}{\sqrt[30]{2^{45}}}=\frac{\sqrt[30]{2^{29}}}{\sqrt[30]{2^{45}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[30]{2^{16}}}=\frac{\sqrt[30]{2^{14}}}{\sqrt[30]{2^{16}}\cdot\sqrt[30]{2^{14}}}=\frac{\sqrt[30]{2^{14}}}{\sqrt[30]{2^{30}}}=\frac{\sqrt[30]{2^{14}}}{2}=\frac{\sqrt[15]{2^7}}{2}$$

Para practicar

1. Escribe como potencia de exponente fraccionario:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt{a^3}$ d) $\sqrt[5]{a^3}$

2. Escribe como un radical:

a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$

c) $x^{\frac{1}{5}}$ d) $x^{\frac{5}{3}}$

3. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{25}$ b) $\sqrt[8]{8^2}$

c) $\sqrt[14]{x^6}$ d) $\sqrt[30]{16 \cdot x^8}$

4. Extraer todos los factores posibles de los siguientes radicales

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{9a^3}$ d) $\sqrt{98a^3b^5c^7}$

5. Introducir dentro del radical todos los factores posibles que se encuentren fuera de él.

a) $3 \cdot \sqrt{5}$ b) $2 \cdot \sqrt{a}$

c) $3a \cdot \sqrt{2a^2}$ d) $ab^2 \sqrt[3]{a^2b}$

6. Reduce al mínimo común índice los siguientes radicales.

a) $\sqrt{5}; \sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{4}; \sqrt[4]{3}; \sqrt{2}$

c) $\sqrt[4]{3}; \sqrt[8]{7}; \sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}; \sqrt[6]{32}; \sqrt[3]{5}$

7. Suma los siguientes radicales indicados.

a) $\sqrt{45} - \sqrt{125} - \sqrt{20}$

b) $\sqrt{75} - \sqrt{147} + \sqrt{675} - \sqrt{12}$

c) $\sqrt{175} + \sqrt{63} - 2\sqrt{28}$

d) $\sqrt{20} + \frac{1}{3}\sqrt{45} + 2\sqrt{125}$

8. Multiplica los siguientes radicales

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ b) $5 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{2x^2}$

e) $\sqrt{2ab} \cdot \sqrt[4]{8a^3}$ f) $\sqrt[4]{2x^2y^3} \cdot \sqrt[6]{5x^2}$

9. Multiplica los siguientes radicales

a) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{2}$

b) $(7\sqrt{5} + 5\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}$

c) $(2\sqrt{3} + \sqrt{5} - 5\sqrt{2}) \cdot 4\sqrt{2}$

d) $(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$

10. Divide los siguientes radicales

a) $\dfrac{\sqrt{6x}}{\sqrt{3x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{75x^2y^3}}{5\sqrt{3xy}}$

c) $\dfrac{\sqrt{9x}}{\sqrt[3]{3x}}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{8a^3b}}{\sqrt[4]{4a^2}}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[9]{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[8]{x^3}}$

11. Calcula:

a) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}}$ b) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^3}}$

c) $\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$ d) $\sqrt[6]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

12. Racionaliza.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{2a}{\sqrt{2ax}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

13. Racionaliza.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3} - 1}$ b) $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$

c) $\dfrac{5}{4 - \sqrt{11}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$

Para saber más

$$\sqrt{n}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{\dots}}}}$$

Aproximación de una raíz cuadrada mediante fracciones

Cualquier número irracional se puede aproximar mediante una fracción, que se obtiene a partir de su desarrollo en fracción continua.

Mediante las fracciones continuas se puede aproximar cualquier raíz a una fracción.

Desarrollo de: $\boxed{\sqrt{2}=1'4142}$

$$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1'5$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5}=1'4$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{17}{12}=1'4166$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=\frac{41}{29}=1'4167$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}=\frac{99}{70}=1'4142$$

Otros desarrollos

$\sqrt{3}=\left[1,\overline{12}\right]$ $\sqrt{7}=\left[2,\overline{1114}\right]$

$\sqrt{5}=\left[2,\overline{4}\right]$ $\sqrt{8}=\left[2,\overline{14}\right]$

$\sqrt{6}=\left[2,\overline{24}\right]$ $\sqrt{10}=\left[3,\overline{6}\right]$

Algoritmo

La primera cifra $\mathbf{a_1}$ es la parte entera de la raíz

$$x_1=\sqrt{2}$$

$$a_1=\left[x_1\right]=\left[\sqrt{2}\right]=1$$

La segunda cifra $\mathbf{a_2}$ es la parte entera de x_2

$$x_1=1+\frac{1}{x_2}$$

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{x_2}\Rightarrow\sqrt{2}-1=\frac{1}{x_2}\Rightarrow x_2=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

$$a_2=\left[x_2\right]=\left[\sqrt{2}+1\right]=2$$

La tercera cifra $\mathbf{a_3}$ es la parte entera de x_3

$$x_2=1+\frac{1}{x_3}$$

$$\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{x_3}\Rightarrow\sqrt{2}-1=\frac{1}{x_3}\Rightarrow x_3=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

$$a_3=\left[x_3\right]=\left[\sqrt{2}+1\right]=2$$

No es necesario hacer más cálculos por repetirse periódicamente los cocientes.

$$\sqrt{2}=\left[1,\overline{2}\right]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$$

Recuerda lo más importante

Radicales

Llamamos **raíz n-ésima** de un número dado al número que elevado a **n** nos da al primero.

La expresión es $\sqrt[n]{a}$ un **radical** de **índice n** y **radicando a**.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

Potencia de exponente fraccionario

Un radical es equivalente a una potencia de exponente **fraccionario** donde el numerador de la fracción es el exponente del radicando y el denominador es el índice de la raíz.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Propiedad fundamental

El valor de un radical no varía si se multiplican ó se dividen por el mismo número el índice y el exponente del radicando.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$$

Reducir a índice común

Reducir a índice común dos radicales dados es encontrar dos radicales equivalentes a los dados que tengan el mismo índice.

Radicales semejantes

Son aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando, pudiendo diferir en el coeficiente que los multiplica.

Operaciones con radicales

Para **multiplicar(o dividir)** radicales del mismo índice se deja el índice y se multiplican(o dividen) los radicandos. Si tienen índice distinto, primero se reduce a índice común.

Para hallar la **raíz de un radical** se deja el radicando y se multiplican los índices.

Para **sumar (o restar)** radicales semejantes se suman (o restan) los coeficientes y se deja el radical

Racionalizar

Racionalizar una fracción con radicales en el denominador, es encontrar una fracción equivalente que no tenga raíces en el denominador.

Autoevaluación

1. Calcula la siguiente raíz: $\sqrt[7]{78125}$

2. Escribe en forma de exponente fraccionario: $\sqrt[10]{x^3}$

3. Calcular: $\sqrt{18}-\sqrt{98}$

4. Introduce el factor en el radical: $6\sqrt[4]{5}$

5. Calcula, simplifica y escribe con un solo radical: $\sqrt[7]{7\sqrt[3]{3}}$

6. Extrae los factores del radical: $\sqrt[4]{243}$

7. Racionaliza: $\dfrac{45}{\sqrt[3]{25}}$

8. Calcular y simplificar: $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[5]{4}$

9. Calcular y simplificar: $\dfrac{\sqrt[7]{125}}{\sqrt[3]{5}}$

10. Cuánto mide la arista de un cubo si su volumen es $1331m^3$

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $x^{\frac{2}{3}}$
c) $a^{\frac{3}{2}}$ d) $a^{\frac{3}{5}}$

2. a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5^3}$
c) $\sqrt[5]{x}$ d) $\sqrt[3]{x^5}$

3. a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[4]{8}$
c) $\sqrt[7]{x^3}$ d) $\sqrt[15]{4x^2}$

4. a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt[3]{2}$
c) $3a\sqrt{a}$ d) $7ab^2c^3\sqrt[3]{2abc}$

5. a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{4a}$
c) $\sqrt{18a^4}$ d) $\sqrt[3]{a^5b^7}$

6. a) $\sqrt[4]{25};\sqrt[4]{3}$
b) $\sqrt[12]{256};\sqrt[12]{27};\sqrt[12]{4}$
c) $\sqrt[18]{9};\sqrt[8]{7};\sqrt[8]{216}$
d) $\sqrt[6]{27};\sqrt[6]{32};\sqrt[6]{25}$

7. a) $-4\sqrt{5}$ b) $11\sqrt{3}$
c) $4\sqrt{7}$ d) $15\sqrt{5}$

8. a) $\sqrt{18}$ b) $15\sqrt{10}$
c) $\sqrt[3]{108}$ d) $\sqrt[6]{4x^7}$
e) $\sqrt[4]{32a^5b}$ f) $\sqrt[12]{200x^{10}y^9}$

9. a) $2-\sqrt{6}$
b) $14\sqrt{5}+30$
c) $8\sqrt{6}+4\sqrt{10}-20$
d) 2

10. a) $\sqrt{2}$ b) $y\sqrt{x}$
c) $\sqrt[6]{81x}$ d) $\sqrt[6]{8a^3b^2}$
e) $\sqrt[6]{243}$ f) $\sqrt[24]{x^{11}}$

11. a) $\sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[20]{x^{11}}$
c) $\sqrt[24]{x^{23}}$ d) $\sqrt[3]{x^2}$

12. a) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{2ax}}{x}$ d) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x}$

13. a) $\sqrt{3}+1$ b) $-7-3\sqrt{5}$
c) $4+\sqrt{11}$ d) $2-\sqrt{2}$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 5

2. $x^{\frac{3}{10}}$

3. $-4\sqrt{2}$

4. $\sqrt[4]{6480}$

5. $\sqrt[21]{1029}$

6. $3\sqrt[4]{3}$

7. $9\sqrt[3]{5}$

8. $\sqrt[20]{8192}$

9. $\sqrt[21]{25}$

10. 11 cm

No olvides enviar las actividades al tutor ►

ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: 4º
Quincena nº: 2	Asignatura: Matemáticas B	
Fecha:	Profesor de la asignatura:	

1. Escribe las potencias como radicales y los radicales como potencias:

a) $\sqrt{2^5} =$ b) $2^{\frac{3}{5}} =$

c) $\sqrt[5]{2} =$ d) $5^{\frac{1}{3}} =$

2. Calcula: $4\sqrt{2} - 9\sqrt{18} + 15\sqrt{50}$

3. Calcula expresando el resultado como una potencia de exponente fraccionario lo más simplificado posible:

$$\frac{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{12}}{\sqrt{6}} =$$

4. Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}} =$ b) $\frac{4}{\sqrt{5} - 1}$

cidead@mec.es

http://cidead.cnice.mec.es

C/ TORRELAGUNA, 58
28027 MADRID
TEL: 91 3778300
FAX: 91 3778314